



# Špecifiká odhadu výnosovej krivky na Slovensku

Pavel Gertler, Národná banka Slovenska

Jakub Porubčanský, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského

*Nízky počet štátnych dlhopisov so samostatným ISIN-om, slabá likvidita slovenského dlhopisového trhu a nedostupnosť cenových informácií o transakciách spôsobujú, že odhad zero-kupónovej výnosovej krivky, ktorú NBS od júna 2017 publikuje na svojej stránke, má určité špecifiká a s nimi sú spojené určité skreslenia. V článku preto identifikujeme a meriame chyby, ktoré pri odhade výnosovej krivky môžu vzniknúť. Výsledky naznačujú, že priemerná chyba odhadu v dôsledku kvality trhu a vstupných údajov dosahuje 20 až 40 základných bodov, pričom chyby v kratších splatnostiach sú spravidla vyššie. Analýza citlivosti na zmenu metodológie síce potvrdzuje, že špecifikácia vybraná pre pravidelne publikované odhady je vhodná, no analýza historických údajov motivuje k opätovnému prehodnoteniu metodiky v čase, keď pravdepodobne príde k ďalšiemu zníženiu likvidity na trhu v dôsledku ukončenia programu nákupu aktív (APP).*

## ZMYSEL VÝNOSOVEJ KRIVKY

Výnosová krivka reprezentuje funkčný vzťah medzi dobou splatnosti dlhopisu a jeho okamžitou úrokovou sadzbou – výnosom. Výnos odráža názor trhu na finančný úžitok z držby tohto nástroja na konkrétne obdobie. Ide teda o nástroj, ktorý informuje o očakávaníach spojených s relevantným trhom. Výnosová krivka a jej variácie preto môžu byť dôležitým zdrojom informácií pre finančné trhy, menovú aj hospodársku politiku. Prakticky ide o koncept, ktorý prepája všetky dôležité oblasti ekonomiky.

Informácie o výnosoch štátneho dlhu v špecifických splatnostiach sú bežne dostupné aj vo verejných databázach<sup>1</sup>, no na účely presného ocenenia dlhu a lepšieho poznania očakávaní nie sú tieto údaje dostatočne presné. Údaje o cene a výnose reprezentatívneho dlhopisu (prípadne skupiny reprezentatívnych dlhopisov) vo fixnej splatnosti často nepostačujú, pretože skresľujú výnosy nielen z hľadiska cash-flow, ale aj z hľadiska rozdielného kupónu (jeho výšky a frekvencie), ktorý sa z príslušného dlhopisu vypláca. Ideálnym konceptom pre ocenenie dlhu či vyjadrenie očakávaní trhu je preto spojená krivka na celej škále splatností, ktorá by spájala výnosy porovnateľných inštrumentov.

Takúto spojenú výnosovú krivku môže využívať emitent štátneho dlhu na lepšie ocenenie dlhových nástrojov pri emisiách na primárnom trhu, možno z nej abstrahovať výšku a štruktúru rizikovej prirážky a v neposlednom rade ju možno využiť ako vstup pri modelových simuláciách makroekonomických a fiškálnych premenných.

Pravidelné publikovanie výnosovej krivky býva tiež užitočným nástrojom, pretože relatívne dobre vysvetľuje budúcu úroveň ekonomickej výkonnosti, čím dopĺňa informáciu publikovanej makroekonomickej predikcie. Zároveň dovoľuje aktérom na slovenskom trhu štátnych a podnikových dlhopisov analyticky správne odhadnúť,

aký pohyb základného výnosu štátneho dlhopisu očakáva trh.

Keďže z výnosovej krivky možno odvodiť aj očakávania trhu, pokiaľ ide o menovopolitickú sadzbu, s rastúcou snahou o transparentnosť publikujú odhady najmä centrálné banky vyspelých krajín, ktoré riadia svoju menovú politiku. Národné centrálné banky Eurosystemu fungujúce pod spoločnou menovou politikou ECB však prenechali v polovici minulej dekády publikovanie výnosových kriviek Banke pre medzinárodné účtovanie<sup>2</sup> a odhady za celú eurozónu produkuje a zverejňuje na svojej stránke Európska centrálna banka.

## VÝNOSY DLHOPISOV VERZUS VÝNOSOVÁ KRIVKA

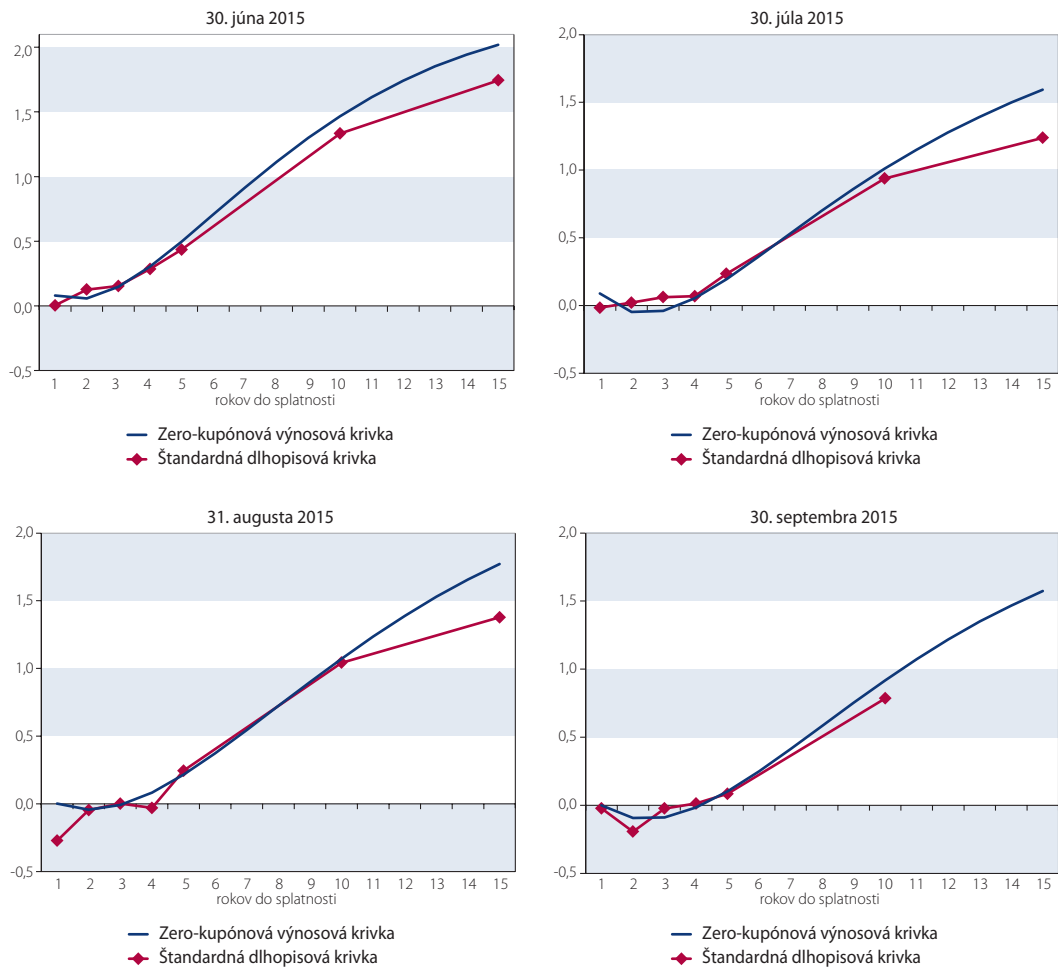
Výnosová krivka očistená od výšky kupónu a cash-flow, tzv. zero-kupónová výnosová krivka, poskytuje lepšie vyjadrenie očakávaní oproti bežným údajom o výnosoch vo fixných splatnostiach v troch základných oblastiach:

- Dlhopisy majú v čase meniacu sa splatnosť. Skutočná splatnosť referenčného dlhopisu (napríklad 10 rokov) alebo skupiny referenčných dlhopisov teda nie je fixná. V závislosti od definície môžu napríklad medzi referenčné 10-ročné dlhopisy patriť všetky so zvyškovou splatnosťou medzi 9,5 a 10,5 roka, čo nie je korektné pri oceňovaní dlhopisu.
- Medzi dvoma splatnosťami môže byť veľká vzdialenosť. Ak je dlhopisov iba obmedzené množstvo, informácia o niekoľkých ročných splatnostiach môže chýbať (napríklad v roku 2017 nie je na trhu žiadny slovenský dlhopis so splatnosťou medzi 3 a 5 rokmi). To komplikuje presnejšie ocenenie dlhu na relatívne veľkom časovom úseku.
- Rôzne dlhopisy majú rôznu výšku kupónu a frekvenciu jeho výplaty. Cena a výnos dlhopisu majú navzájom inverzný vzťah a pretínajú sa v bode,

<sup>1</sup> Informácie o výnosoch dlhopisov v jednotlivých fixných splatnostiach zverejňuje napríklad NBS, Eurostat, alebo ich možno nájsť na finančných platformách, ako je Bloomberg alebo Reuters.  
<sup>2</sup> Jedinou výnimkou v rámci eurozóny je nemecká Bundesbanka.



Obrázok 1 Štandardná a zero-kupónová krivka slovenských štátnych dlhopisov



Zdroj: Bloomberg.

Poznámka: Hodnoty na zero-kupónovej výnosovej krivke sú funkčnou aproximáciou očistených výnosov.

3 Obsahuje v sebe len tzv. bezrizikové kreditné riziko krajiny.

keď sa výška fixného kupónu rovná výnosu do splatnosti (par cena). Cena dlhopisu závisí od výšky výplaty fixného kupónu, resp. výnosy jednotlivých emisií sú porovnateľné iba pri rovnakej výške kupónu a frekvencii jeho výplaty.

Zero-kupónová výnosová krivka tak spája výnosy s nulovým kupónom na osi zvislej splatnosti. Ak neexistuje trh zero-kupónových dlhopisov, konzistentnú krivku je možné prepočítať s pôvodnými dlhopismi na teoretickú zero-kupónovú krivku očistením od vplyvu kupónu a vplyvu zvyškovej splatnosti. Takáto krivka sa skladá z nekonečného počtu bodov a dá sa vyjadriť ako funkcia. Zero-kupónová krivka sa tak používa na presnejšie ocenenie dlhopisov (resp. iných finančných produktov).

Takáto výnosová krivka poskytuje odbornej verejnosti správne základné<sup>3</sup> diskontné faktory na oceňovanie slovenských finančných aktív. Rozdiel medzi bežnými výnosmi dlhopisov a odhadnutou krivkou ilustruje obrázok 1.

Relatívne veľké rozdiely sú viditeľné najmä na krátkom a na dlhom konci krivky (do 3 rokov a nad 8 rokov). V zásade na krátkom konci aj malé nepresnosti v cene dokážu spôsobiť veľkú chybu vo vyjadrení

v ročných výnosoch a na dlhom konci sú zväčša nepresnosti spôsobené výrazne inou výškou kupónu oproti aktuálne dosiahnuteľným výnosom na trhu v dôsledku hospodárskeho cyklu.

### ODHAD VÝNOSOVEJ KRIVKY NA SLOVENSKU

Odhad zero-kupónovej krivky na Slovensku vychádza z práce Ódora a Povalu (2015). Národná banka Slovenska nadviazala na túto prácu a s miernymi zmenami špecifikácie modelu a vstupných údajov počíta a publikuje odhady zero-kupónovej krivky od júna 2017.

Ako vstupné údaje o výnosoch sa v odhade používajú štátne dlhopisy s fixným (aj nulovým) kupónom. Dlhopisy s variabilným kupónom, medzinárodné emisie a emisie v inej ako domácej mene do odhadu nevstupujú. Do odhadu nevstupujú ani štátne pokladničné poukážky či dlhopisy štátnych podnikov (napr. ŽSR).

Odhad výnosovej krivky prebieha nasledovne. Ako základ čerpá z parametrov odhadu výnosovej krivky z predchádzajúceho dňa, ktoré používa ako štartovacie hodnoty. V ďalšom kroku sa použijú kótované ceny všetkých aktívnych



slovenských štátnych dlhopisov a tieto ceny sa prepočítajú na čisté ceny upravené o cash-flow a výšku kupónov jednotlivých emisií. Na očistené údaje sa na odhad použije 4-faktorová NSS (Nelson-Siegel-Svensson) špecifikácia:

$$i(m, b) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)}{\frac{m}{\tau_1}} + \beta_2 \left( \frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)}{\frac{m}{\tau_1}} - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) \right) + \beta_3 \left( \frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_2}\right)}{\frac{m}{\tau_2}} - \exp\left(-\frac{m}{\tau_2}\right) \right),$$

kde  $b$  je vektor parametrov  $b = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2)$  a  $m$  je splatnosť v rokoch. Takáto špecifikácia pozostáva zo štyroch faktorov a umožňuje dve zakrivenia krivky  $\tau_1$  a  $\tau_2$ . Výsledné vyrovnané hodnoty sa potom publikujú ako súbor zero-kupónových výnosov s frekvenciou jeden rok v splatnosti od 1 do 15 rokov.

Pre odhad výnosovej krivky na Slovensku je možné použiť iba trh štátnych dlhopisov. Počet dlhopisov, ktoré do odhadu vstupujú, sa pohybuje od 12 do 15. Nízky počet dlhopisov je daný najmä emisnou stratégiou vydávať v priebehu dlhšieho obdobia dlhopisy s rovnakým kupónom a rovnakým dátumom splatnosti. Takto vydané dlhopisy v jednej sérii potom majú rovnaké charakteristiky, a teda aj rovnakú cenu a výnos.

Nízky počet dlhopisov na trhu a relatívne nízka likvidita trhu so slovenskými dlhopismi však spôsobujú skreslenia, ktoré je pri interpretácii výsledkov potrebné brať do úvahy. Dlhopisový trh totiž potrebuje určitú mieru likvidity, aby bolo možné spotové sadzby na výnosovej krivke odhadnúť s dostatočnou presnosťou. Nepresnosti, ktoré vyplývajú z takéhoto odhadu zero-kupónovej výnosovej krivky, identifikujeme v niekoľkých oblastiach:

- z dôvodu rozdielných možných prístupov k špecifikácii modelu,
- z dôvodu nižšej početnosti dlhopisov na trhu,
- z dôvodu nižšej likvidity slovenského dlhopisového trhu a
- z dôvodu použitia náhradného zdroja informácií o cenách dlhopisov.

### ANALÝZA CITLIVOSTI NA ZMENU ŠPECIFIKÁCIE

Odhad zero-kupónovej výnosovej krivky, ktorý v súčasnosti publikuje NBS na svojej stránke, má nasledujúce charakteristiky:

- je založený na funkčnej NSS špecifikácii, t. j. odhaduje sa šesť parametrov: úroveň, sklon, dva parametre zakrivenia a dva parametre miesta zakrivenia,
- stanovuje hraničné hodnoty pre niektoré z týchto parametrov,
- využíva vstupy z cien dlhopisov so splatnosťou 6 mesiacov až 15 rokov,
- penalizuje odchýlku pre údaje o cenách dlhopisov s kratšou splatnosťou (čím podporuje stabilitu krátkeho konca krivky),

- ako štartovacie hodnoty pre odhad v určitý deň používa parametre krivky z predchádzajúceho dňa (čím sa znižuje výpočtová náročnosť) a
- keďže krátky koniec krivky nie je stabilný, používa navyše 6-mesačný EURIBOR na jej ukotvenie.

Odhady sú relatívne stabilné v čase, čo sa na prvý pohľad pre malý a málo likvidný trh zdá byť ako úspešná stratégia. Cieľom odhadu výnosovej krivky však nie je v prvom rade jej stabilita, ale jej dôveryhodnosť. Cieľom odhadu by teda mala byť schopnosť odrážať reálny stav na dlhopisovom trhu a premietiť tento stav do najlepšieho možného vyjadrenia (čo najlepšieho fitu) výnosov dlhopisov na rôznych splatnostiach (spojitá funkcia), so zohľadnením rozdielneho cash-flow v rôznych emisiách štátneho dlhu.

Nastavenie metodiky vychádza z prístupu Ódora a Povala (2015) a z úprav Národnej banky Slovenska na základe výsledkov testovania predpokladov uvedených nižšie.

Aby bolo možné monitorovať napĺňanie cieľa dôveryhodnosti odhadu výnosovej krivky, je potrebné zistiť, nakoľko rozdielne špecifikácie modelu vplyvajú na chybu odhadu. Východiskovým odhadom je vždy vyššie uvedená špecifikácia, ktorú NBS používa na publikačné účely. Cieľom tejto analýzy citlivosti je zmerať, ako sa zmenia chyby pri alternatívnych nastaveniach odhadu, pri ktorých vzniká odôvodnený predpoklad, že by mohli produkovať robustnejšie odhady v dlhodobejšom horizonte.

Oproti východiskovej špecifikácii odhadu, ktorá sa používa pri pravidelnej aktualizácii NBS, testujeme tieto alternatívne nastavenia:

- a) Použitie jednoduchého Nelsonovho-Siegelovho modelu. V priemere je na slovenskom trhu 13 rôznych emisií dlhopisov a za celú históriu ich v žiadny deň nebolo viac ako 15. Pri odhade modelu s maximálne 15 pozorovaniami môže byť použitie modelu so šiestimi parametrami zdrojom významných chýb v dôsledku nízkeho stupňa voľnosti. Ani použitie modelu so štyrmi parametrami nie je ideálne, preto porovnáваме rozdiel týchto dvoch odhadov aspoň na výstupe vo forme výsledných chýb odhadu.
- b) Zmena penalizácie nízkych splatností. Penalizácia odchýlky nízkych splatností má za cieľ lepšie ukotviť krátky koniec krivky. Odhad tak bude na krátkom konci presnejší, no tvar krivky môže byť citlivejší na zmeny vstupov v čase. Penalizácia navyše kompenzuje presnosť krátkeho a dlhého konca krivky. Testujeme dve alternatívne nastavenia:
  1. bez penalizácie – všetky ceny dlhopisov vstupujú rovnocenne,
  2. s násobne vyššou penalizáciou – parametre sú nastavené subjektívne, preto chceme vidieť aj dôsledok veľmi vysokej penalizácie.
- c) Zrušenie hraničných hodnôt nastavenia parametrov. Hraničné hodnoty parametrov majú za cieľ obmedzovať veľké zmeny tvaru výnosovej krivky. Keďže pri počte šesť parametrov môže

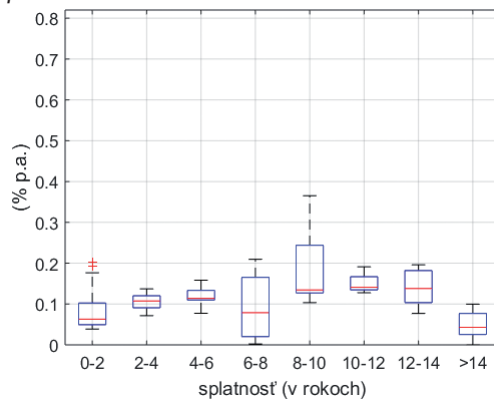


existovať niekoľko lokálnych optimálnych riešení, neobmedzená voľnosť parametrov môže spôsobiť tzv. preskočenie parametra do nového optima, v ktorom sa náhle zmení tvar výnosovej krivky bez toho, aby tomu predchádzal významný signál vo vstupných údajoch. Zostáva však otázkou, či nejaké nové optimum, ktoré obmedzeniami opomínáme, nevysvetľuje tvar výnosovej krivky lepšie ako základný tvar, ktorý obmedzeniami zachovávame.

- d) Zmena nastavenia štartovacích hodnôt. Štartovacie hodnoty pre odhad vychádzajú z minulých parametrov slovenskej krivky. Cieľom je nižšia výpočtová náročnosť a vyššia stabilita krivky (optimalizačný algoritmus môže ťažšie dosiahnuť nové optimum). Výhodou použitia nemeckých štartovacích hodnôt v alternatívnom nastavení odhadu je, že sa vždy vychádza z bezrizikovej výnosovej krivky. Nevýhodou zas je, že zmeny optimálneho riešenia v odhade Bundesbanky sa môžu prenášať do odhadu na slovenskom trhu exogénne.
- e) Zmena nastavenia spodnej hranice splatnosti vstupujúcej do výpočtu. Vysoká nepresnosť ocenenia dlhopisov s krátkou splatnosťou na slovenskom dlhopisovom trhu viedla NBS k tomu, že do odhadu výnosovej krivky nevstupujú ceny dlhopisov kratšie ako 6 mesiacov (argumentom sa venujeme v nasledujúcej časti). Alternatívny odhad v tomto bode bude počítať na vstupe iba s cenami dlhopisov s viac ako 24-mesačnou splatnosťou.

Na overenie, či odhad plní svoj cieľ, je nutné monitorovať odchýlky odhadnutej krivky od očistených výnosov dlhopisov. Odchýlky meriame ich štvorcovou chybou (RMSE).

**Obrázok 2 Rozdelenie chýb odhadu v základnej špecifikácii odhadu**



Zdroj: Výpočty autorov.

Poznámka: Červená čiara zobrazuje mediánovú hodnotu chyby (RMSE) pre dlhopisy spadajúce do príslušnej splatnosti (napr. mediánová chyba pri odhade dlhopisov so splatnosťou 8 až 10 rokov bola v marci 2017 0,13 %). Modrý rámik zodpovedá rozptylu medzi kvartilmi rozdelenia chýb (napr. štvrtinu dní v marci 2017 bola chyba odhadu dlhopisov so splatnosťou 8 až 10 rokov nižšia ako 0,125 % a štvrtinu dní bola chyba vyššia ako 0,25 %). Dni s maximálnou a minimálnou chybou sú zobrazené ako hraničné čierou rýskou.

Ako referenčný mesiac sme použili marec 2017. Motiváciou je, že ide o nedávne obdobie s relatívne nízkou volatilitou výnosovej krivky v priebehu mesiaca. Bázou na porovnanie v tejto analýze je špecifikácia, ktorú Národná banka Slovenska pravidelne používa na odhad výnosovej krivky. Rozdelenie odchýlok odhadu výnosovej krivky od samotných výnosov jednotlivých emisií štátnych dlhopisov očistených od cash-flow a kupónu (t. j. rozdiel fitovanej a realizovanej hodnoty) v jednotlivých splatnostiach je vyjadrené na obrázku 2. Poukazuje na to, že odhad je relatívne dobrý s mediánovou chybou okolo 10 bázických bodov.

Na obrázku 3 je rozdelenie odchýlok odhadu výnosovej krivky podľa splatností obdobne ako na obrázku 2. Postupne sme použili všetky testované alternatívne špecifikácie opísané na začiatku tejto časti. S výnimkou zjednodušenej špecifikácie so štyrmi parametrami (a) a špecifikácie, ktorá abstrahuje od všetkých dlhopisov so splatnosťou kratšou ako 2 roky (e) – kde okrem úplne krátko dopočítaného konca sú chyby vyššie až do 4 rokov splatnosti – sú chyby odhadu rozdelené relatívne podobne vo všetkých ostatných alternatívnych špecifikáciách.

Pre mesiac marec 2017 by preto bolo možné povedať, že viac parametrov odhadu napriek strate stupňov voľnosti pomáha (a), podobne ako aj zohľadnenie dlhopisov s krátkou splatnosťou, ktorých chyby však je na menovopolitické účely (časť krivky do 3 rokov splatnosti) zmysluplné čo najviac penalizovať (b2) a parametre modelu čo najmenej ohraničovať (c). V zásade však použitím základného tvaru na chybe odhadu v danom období veľa neštrácame.

Takéto adresné vyjadrenie chýb špecifikácie odhadu je možné extrahovať pre ktorýkoľvek mesiac či iné obdobie. Preto v čase systémovej zmeny na dlhopisovom trhu bude vhodné opakovane vykonať obdobné cvičenie a vyhodnotiť, či existujúca špecifikácia odhadu stále produkuje dostatočne dobré a nevychýlené výsledky (obrázok č. 4).

Napriek tomu, že rozdielne špecifikácie odhadu výnosovej krivky porovnávame vždy oproti jej základnému tvaru, robustnosť modelu môže mať viac rozmerov. Napríklad Gilli a kol. (2010) ukazujú, že preferencia použitia určitého typu špecifikácie (NS alebo NSS) sa môže líšiť na základe toho, či používame hraničné hodnoty pri odhade parametrov, alebo pracujeme s odhadom bez reštrikcií. Kombinované zmeny oproti základnému tvaru však v záujme čitateľnosti a prehľadnosti výsledkov testovania neuvádzame.

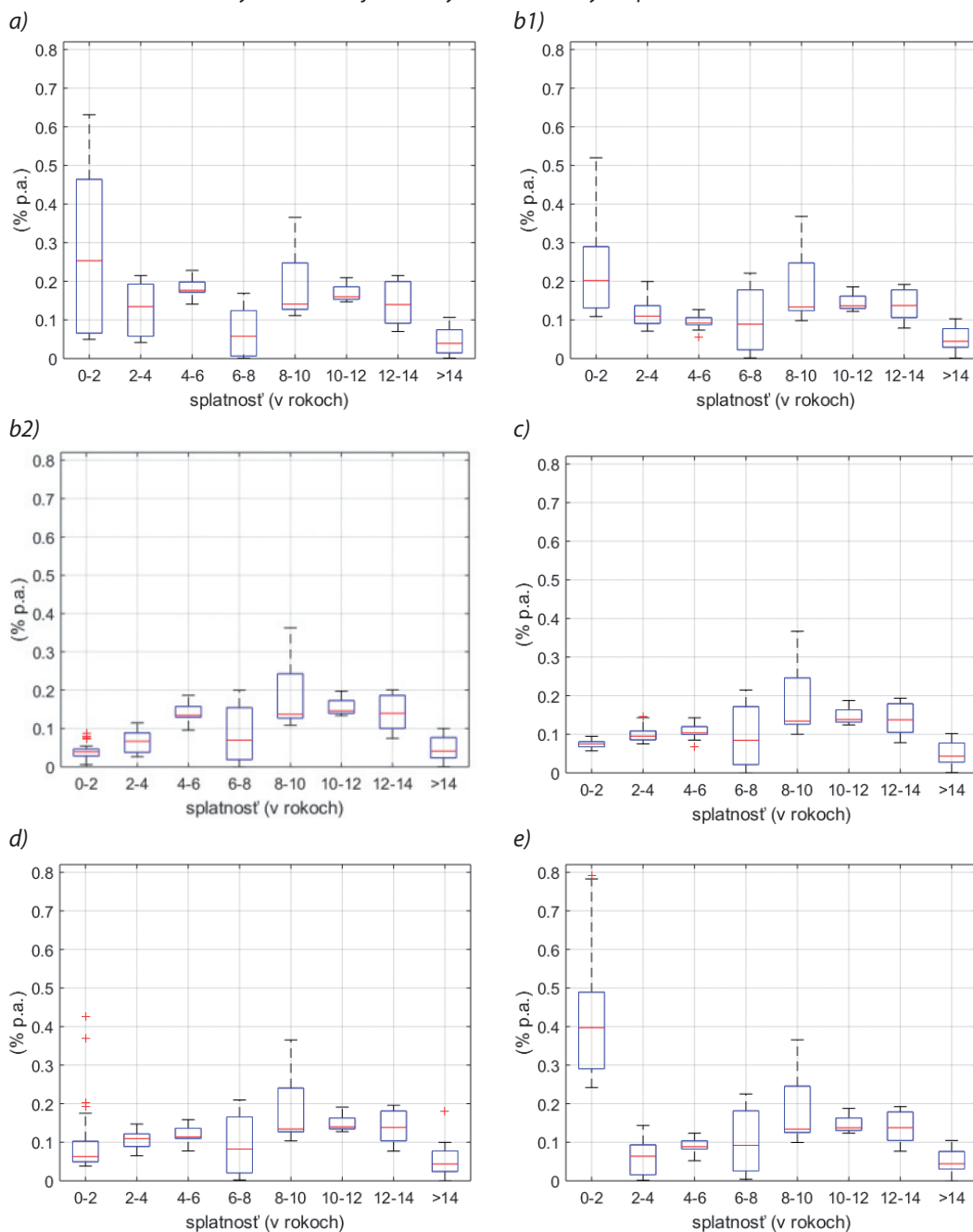
## CHYBY V DÔSLEDKU NÍZKEJ POČETNOSTI DLHOPISOV

Existuje niekoľko dôvodov, prečo môže dochádzať ku skresleniu.

- Dlhopisy so zvyškovou splatnosťou menej ako rok bývajú bežne málo likvidné, pretože ako instrument s fixným príjmom (vyplácaným v prípade štátnych dlhopisov najčastejšie raz ročne) nie sú cieľom investičných stratégií agentov



Obrázok 3 Rozdelenie chýb odhadu v jednotlivých alternatívnych špecifikáciách



Zdroj: Výpočty autorov.

Poznámka: Vľavo hore: NS (Nelson-Siegel) špecifikácia so štyrmi parametrami; vpravo hore: bez penalizácie chýb na krátkom konci; vľavo v strede: vyššia penalizácia nízkych splatností; vpravo v strede: bez ohraničenia parametrov; vľavo dole: parametre nemeckej krivky ako štartovacie hodnoty; vpravo dole: vyradenie všetkých dlhopisov so splatnosťou nižšou ako 2 roky.

na trhu. Vo svojich odhadoch to zohľadňuje Bank of England aj Bundesbanka, ktoré najprv odfiltrujú dlhopisy so splatnosťou nižšou ako 3 mesiace, a aj k dlhopisom so splatnosťou do 1 roka sa vyjadrujú veľmi rezervovane. Do odhadu slovenskej krivky vstupujú iba dlhopisy so splatnosťou nad 6 mesiacov.

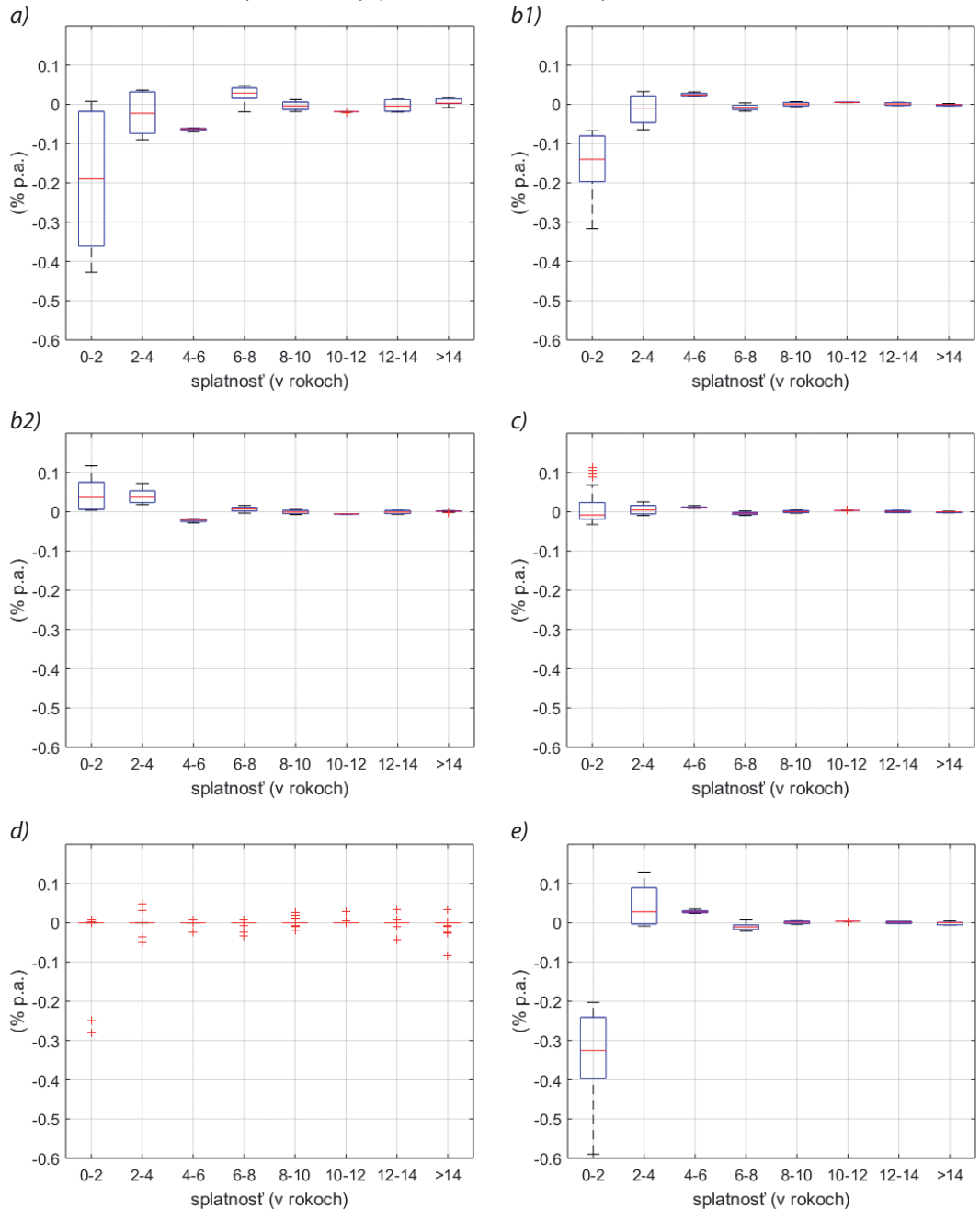
- V období ostných niekoľkých rokov sa trh slovenských štátnych dlhopisov skladá z 12 až 15 emisií, z toho 3 až 4 zvyčajne majú splatnosť kratšiu ako 2 roky. Na základe ich rôznej

zvyškovej splatnosti a rozdielnej výšky kupónu pozorujeme diferencovanú cenu pre tieto finančné inštrumenty. Pri veľmi nízkom dennom počte transakcií existuje dodatočné riziko (k riziku opísanému v predchádzajúcom bode), že trh nedokáže presne oceniť jednotlivé inštrumenty.

S cieľom identifikovať všeobecné skreslenie nízkych splatností a časť špecifického skreslenia vyplývajúceho zo zníženého počtu dlhopisov na trhu uskutočníme nasledujúci test.



Obrázok 4 Porovnanie chýb základnej špecifikácie s alternatívnymi nastaveniami



Zdroj: Výpočty autorov.

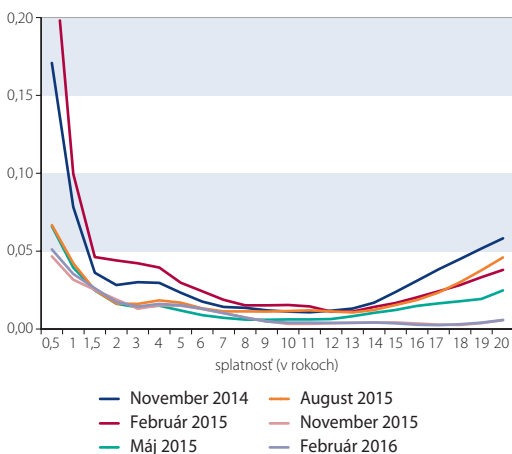
Poznámka: Vľavo hore: NS (Nelson-Siegel) špecifikácia so štyrmi parametrami; vpravo hore: bez penalizácie chýb na krátkom konci; vľavo v strede: vyššia penalizácia nízkych splatností; vpravo v strede) bez ohraničenia parametrov; vľavo dole: parametre nemeckej krivky ako štartovacie hodnoty; vpravo dole: vyradenie všetkých dlhopisov so splatnosťou nižšou ako 2 roky.

Z dostupných údajov o nemeckých štátnych dlhopisoch (približne 40 každý deň) náhodne vyberáme toľko dlhopisov, koľko ich máme k dispozícii v daný deň na slovenskom trhu. Aby sme vybrali rovnomerne naprieč splatnosťami, rozdelíme krivku do troch košov (do 3 rokov, od 3 do 9 rokov, nad 9 rokov). Pre každý deň odhadujeme 50 výnosových kriviek s daným počtom náhodne zvolených dlhopisov z každého koša splatností. Z 50 simulovaných kriviek pre každý deň spočítame medzikvartilný rozptyl (IQR). Reportujeme priemernú hodnotu IQR za dni testovaného mesiaca.

Skreslenie cien na dlhopisovom trhu v krátkych splatnostiach je vidieť na obrázku 5. V období po marci 2015 je skreslenie vyjadrené priemerným IQR relatívne nízke, no výrazne vyššie bolo pred marcom 2015, teda pred začiatkom nákupu verejného dlhu v rámci programu nákupu štátnych dlhopisov (APP). Medzikvartilný rozptyl pre splatnosti nižšie ako jeden rok dosahoval na prelome rokov 2014 a 2015 10 až 40 bázičkových bodov a počas prebiehajúceho programu APP približne 5 bázičkových bodov. Ocenenie krátkeho konca krivky tak z hľadiska nízkej početnosti dlhových inštru-



**Obrázok 5 Vplyv šírky trhu – rozptyl chýb odhadu v jednotlivých mesiacoch**



Zdroj: Výpočty autorov.  
Poznámka: Priemerný medzikvartilný rozptyl pre výnosové krivky v rôznych mesiacoch.

mentov možno považovať v období prebiehajúceho programu APP za dôveryhodné pre splatnosti od 6 mesiacov. V období mimo programu je chyba nameraná na krátkom konci výrazne vyššia a prijateľná až pri splatnostiach od 18 mesiacov.

### CHYBY V DÔSLEDKU NÍZKEJ LIKVIDITY

Ďalšia nepresnosť vyplýva z rozdielnej intenzity obchodovania na nemeckom a slovenskom dlhopisovom trhu. V tomto teste preto abstrahujeme od rozdielného počtu pozorovaní a venujeme sa výlučne identifikácii možného skreslenia z rozdielného charakteru trhu. Test likvidity spočíva v porovnaní štvorcovej chyby odhadu na slovenskom a nemeckom trhu pri zachovaní počtu pozorovaní v oboch prípadoch.

Pri odhade slovenskej zero-kupónovej výnosovej krivky vypočítame strednú hodnotu vzdia-

lenosti krivky od pozorovaných čistých výnosov dlhopisov (očistených od kupónu). V prípade nemeckého trhu zopakujeme vyššie uvedené cvičenie, teda odhadujeme nemeckú krivku z redukovaného počtu pozorovaní 50-krát pre každý deň. Z päťdesiatich odhadov pre každý deň vypočítame priemernú a strednú chybu odhadu a príslušné štatistiky.

Stredná chyba odhadu zero-kupónovej krivky spôsobená rozdielnym charakterom (likviditou) dlhopisového trhu je na Slovensku približne dvoj- až trojnásobná oproti chybe odhadu na trhu v Nemecku a dosahuje približne 5 až 10 bázičických bodov. V niektorých prípadoch je chyba odhadu na slovenskom trhu dokonca vyššia ako akákoľvek dosiahnuteľná chyba v prípade bežného likvidného trhu. Navyše táto chyba je aditívna voči chybe nameranej v predchádzajúcom teste, keďže identifikuje výlučne skreslenie z dôvodu menej likvidného trhu (odhady nemeckej krivky sú z redukovaného počtu pozorovaní).

### CHYBY V DÔSLEDKU NÁHRADNÉHO ZDROJA INFORMÁCIÍ O CENÁCH DLHOPISOV

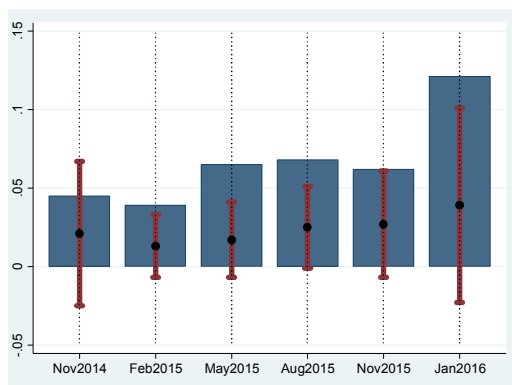
Na odhad výnosových kriviek sa ako vstupné údaje používajú posledné denné kótované ceny pre príslušný dlhopis. Dôvodom použitia kótovaných cien namiesto realizačných cien je opäť veľmi nízka likvidita, respektíve príliš málo zobchodovaných dlhopisov za deň, kde by bol prístup k údajom o cenách. Údaje o zrealizovaných obchodoch sú dostupné z burzy cenných papierov v počte priemerne dva obchody za deň. Tento počet je nepostačujúci, navyše obchody sú často dohodnuté vopred, a tak cena nemusí byť relevantná v čase obchodu. Najčastejším miestom obchodu slovenských dlhopisov sú priame transakcie cez telefón alebo chat, kde obchodní partneri nie sú nútení poskytovať informácie. Bloomberg však okrem kótovaných cien obsahuje tiež údaje priamo z obchodnej platformy. Tie sú blízke realizovaným cenám vďaka tomu, že ide o tzv. živé ceny, ktoré sa menia na realizačné v momente, keď ich v systéme protistrana aktivuje (kliknutím). Zozbierali sme všetky takéto živé ceny pre príslušné slovenské dlhopisy za históriu 140 dní a porovnali ich s kótovanými cenami, ktoré vstupujú do odhadu výnosových kriviek.

Po zoradení všetkých živých cien slovenských dlhopisov sme pre každý jeden dlhopis v daný deň získali 10 až 20 pozorovaní. V pôvodnej databáze sa pre takúto skupinu pracuje s jednou kótovanou cenou, preto pre skupiny živých cien vypočítame priemer, medián a iné miery štatistického rozdelenia. V záujme konzistencie identifikujeme tiež poslednú pozorovanú cenu pre každý dlhopis za každý deň.

Po spárovaní údajov posledných pozorovaných živých cien s kótovanými cenami vypočítame ich rozdiel a porovnáme tento rozdiel s rozdelením denného pohybu cien pre daný dlhopis v daný deň.

Z 310 pozorovaní medzi 2. septembrom a 6. októbrom 2015 bola v 266 prípadoch (teda v 86 %) kótovaná cena mimo intervalu spoľahlivosti den-

**Obrázok 6 Vplyv hĺbky trhu – chyba SK krivky v dôsledku nízkej likvidity trhu**

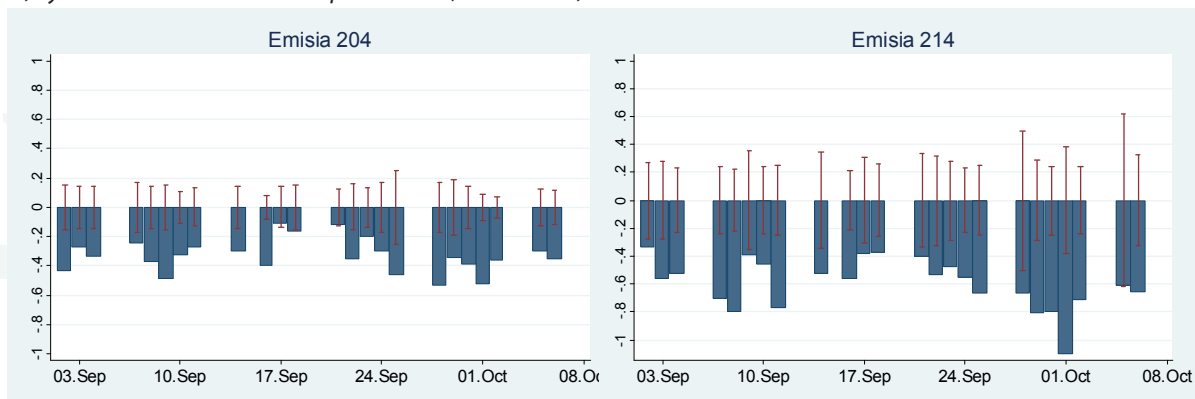


Zdroj: Výpočty autorov.  
Poznámka: Modrý stĺpec predstavuje priemernú mediánovú hodnotu chyby (RMSE) odhadov slovenskej dlhopisovej krivky v danom mesiaci. Červenou je označený 95 % interval, teda +/- 2 štandardné odchýlky okolo priemernej dennej RMSE odhadu nemeckej krivky s redukovaným počtom pozorovaní.

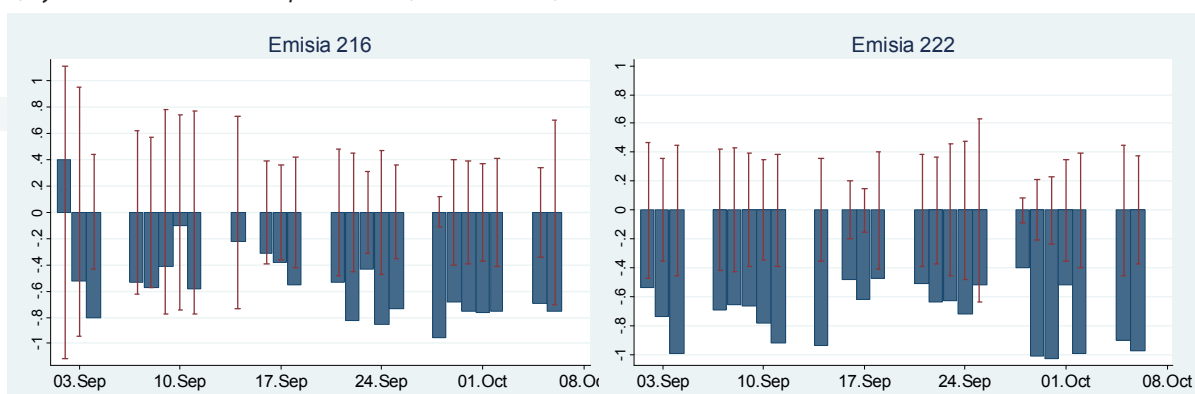


Obrázok 7 Systémové skreslenie odhadu v dôsledku charakteru vstupnej ceny

## a) Vybrané emisie so strednou splatnosťou (3 až 7 rokov)



## b) Vybrané emisie s dlhšou splatnosťou (9 rokov a viac)



Zdroj: Bloomberg a výpočty autorov.

Poznámka: Modrý stĺpec označuje rozdiel medzi poslednou kótovanou a poslednou realizačnou cenou pre konkrétny slovenský dlhopis v určitý deň. Červené pásmo označuje 95 % interval rozdelenia, v ktorom sa pohybovala cena dlhopisu v daný deň. Rozdiel ceny 0,2 (t. j. každý diel na osi y) korešponduje približne s výnosom 3 bázické body.

ného pohybu realizačnej ceny. Navyše v stredných a vyšších splatnostiach, ktoré sú pre tento trh podstatné, je tento podiel ešte vyšší. Rozdiel v zdrojových údajoch je tiež vychýlený iba na jednu stranu, čo poukazuje na systematické skreslenie v rozsahu približne 10 bázických bodov.

## ZÁVER

Odhad zero-kupónovej výnosovej krivky je bezpochyby dôležitým nástrojom pre finančný trh, tvorbu hospodárskych politík, plánovanie a oceňovanie emisií nového štátneho dlhu či ekonomickú analýzu.

Odhad, ktorý Národná banka Slovenska začala zverejňovať v júni 2017, je najlepšou možnou reflexiou skutočných očakávaní trhu, ktoré výnosová krivka štátnych dlhopisov môže poskytovať.

Malý a málo likvidný trh štátnych dlhopisov však v sebe skrýva nástrahy, ktoré je potrebné zohľadniť pri interpretácii výsledkov. Agregovaná chyba odhadu, ktorú sme identifikovali v dôsledku nízkeho počtu vydaných dlhopisov, nízkej likvidity trhu a tiež z nej plynúceho nedostatku

transakčných cien, môže v priemere dosiahnuť 40 bázických bodov. Výsledky naznačujú, že zvýšená likvidita spôsobená nákupmi dlhopisov centrálnou bankou na sekundárnom trhu od marca 2015 dočasne zredukovala túto chybu asi na polovicu. Prirodzene, chyby sú vyššie v krátkych splatnostiach a najnižšie v stredných splatnostiach.

Autonómna penalizácia chýb v krátkych splatnostiach sčasti dokáže riešiť vyššie uvedenú chybu, čo potvrdila aj analýza citlivosti. Dodatočné zvýšenie penalizácie oproti základnej špecifikácii dokázalo výraznejšie znížiť túto chybu. V dlhodobom horizonte by však takýto prístup mohol mať negatívne dôsledky na odhad v stredných a dlhších splatnostiach. Z hľadiska ostatných testovaných zmien špecifikácie sa východisková špecifikácia ukázala ako relatívne robustná. Pri silnejších impulzoch na trhu v budúcnosti – napríklad po ukončení programu APP – však možno očakávať ďalší pokles likvidity na trhu a teda ešte vyššie chyby odhadu výnosovej krivky. Bude preto potrebné rozdelenie chýb v budúcnosti ďalej monitorovať.

## Literatúra

1. BIS Papers (2005): Zero-coupon yield curves: technical documentation, BIS Papers No. 25.
2. Krippner, L. (2015): Zero Lower Bound Term Structure Modelling. A Practitioner's Guide. Palgrave MacMillan.
3. Ódor, L. a Povala, P. (2015): Estimates of the Slovak zerocoupon yield curve, IFP manuál.
4. Svensson, L. (1994): Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-94, IMF Working Paper.