



Modelovanie finančných sietí¹

Jakub Danko

Ekonomická fakulta Technickej univerzity v Košiciach

¹ Článok je zhrnutím diplomovej práce s rovnakým názvom, za ktorú získal autor druhú cenu v súťaži o cenu guvernéra NBS pre študentov univerzít za výnimočnú dizertačnú, prípadne diplomovú prácu v oblasti menovej ekonomie, makroekonomie alebo finančnej ekonomie.

Úvod

Kapitálový trh predstavuje mechanizmus a súbor inštitúcií a transakcií, prostredníctvom ktorých sa stretávajú ponuka a dopyt po peňažnom kapitáli. Analýza kapitálových trhov sa často zovšeobecňuje a zjednodušuje iba na analýzu konkrétneho burzového indexu, napríklad DJIA alebo DAX. Toto jedno bezrozmerné číslo následne popisuje vývoj trhu ako celku, pričom len veľmi ťažko môže zachytiť komplexnejšie väzby v rámci tohto zložitého systému. Cieľom práce je preto analýza štruktúry kapitálového trhu na báze sektorových subindexov konkrétneho indexu (v našom prípade DJIA). Takto identifikovaná štruktúra dáva možnosť sledovať vzťahy aj vo vnútri trhu, a nielen jeho vývoj ako celok, čo považujeme v súčasnom ekonomickom vývoji charakterizovanom vysokým stupňom zložitosti za veľký prínos.

POUŽITÁ METODOLÓGIA

Práca sa venuje hľadaniu štruktúry amerického kapitálového trhu s využitím sektorových subindexov amerického burzového indexu DJIA prostredníctvom metódy najmenej kostry (Minimum Spanning Tree), prvýkrát použitej profesorom Mantegnom (1999). Celá analýza je vykonaná v prostredí štatistického programovacieho jazyka R. V práci sú použité nasledujúce matematicko-štatistické metódy:

- Metóda hľadania najmenej kostry grafu (Minimum Spanning Tree)
- Zhuková analýza s využitím Wardovej metódy a metódy K-means
- Využitie modelu GARCH(1, 1) na identifikáciu rezíduí
- Využitie klasických korelačných matíc
- Analýza premenných na časových oknách
- Metóda podmienených dynamických korelácií (Dynamic Conditional Correlations)
- Analýza rôznych typov vzdialeností
- Matice prechodu a využitie Markovových reťazcov
- Analýza rozptylu (ANOVA)
- Výpočet hodnoty v riziku VaR (Value at Risk)

VYUŽITIE NAJMENŠÍCH KOSTIER GRAFU A KORELAČNÝ PRÍSTUP PRI SIEŤOVEJ ANALÝZE

Základy metodológie najmenej kostry grafu s cieľom pochopenia štruktúry kapitálových trhov položil Rosario Mantegna (1999). Onnela a Chakraborti (2003) tiež vychádzajú z výpočtu minimálnej kostry grafu, na rozdiel od predchádzajúceho prístupu však má funkcia mapujúca korelácie medzi vrcholmi na vzdialenosti nelineárny priebeh. Túto novú sieťovú štruktúru nazvali dynamickým grafom akcií. Bonanno a Caldarelli (2004) sa zaoberali vplyvom časového horizontu na výnosnosť finančných inštrumentov a zistili, že s klesajúcim časovým ho-

rizontom sa štruktúra grafu reprezentujúceho trh postupne mení z komplexnej na jednoduchú. Zaoberali sa tiež volatilitou časových radov cien akcií a finančnými trhmi z globálneho pohľadu. Následne autori začali využívať pri analýze pokročilejšie metódy teórie grafov, napríklad reprezentáciu trhu planárnymi grafmi (grafy, ktorých hrany sa nepretínajú). Podobná metodika sa začala využívať aj pri analyzovaní trhu s menovými pármí, teda pri analýze výmenných kurzov – Mizuno, Takayasu (2005), Naylor, Rose, Moyle (2007). Medzi najnovšie analýzy patria práce autorov Kenett, Tumminello, Mantegna (2010), kde sa autori zaoberajú takzvanými parciálnymi koreláciami. Tieto parciálne korelácie následne využívajú ako nástroj na nájdenie najrelevantnejších hrán v grafe. Taktiež vychádzajú z planárných grafov a v práci popisujú aj nový typ závislej siete, pri ktorej zahrnutie hrán, respektíve prepojení, závisí od stredných hodnôt a štandardných odchýlok jednotlivých uzlov (vrcholov) tejto siete. Vyššie uvedení autori pri svojich analýzach prevažne využívajú údaje z New York Stock Exchange (NYSE), jedna z analýz vychádzala aj z Tel Aviv Stock Exchange (TASE).

CHARAKTERISTIKA ANALYZOVANÝCH ÚDAJOV

Americký burzový index DJIA (Dow Jones Industrial Average) obsahuje sektorové subindexy, ktoré sú uvedené v tab. 1.

Tabuľka 1 Subindexy ako vybrané sektory americkej ekonomiky

Skratka (označenie) subindexu	Celý názov subindexu
A1ENE	DOW JONES AMERICAS ENERGY STOCK INDEX
A1BSC	DOW JONES AMERICAS BASIC MATERIALS STOCK INDEX
A1IDU	DOW JONES AMERICAS INDUSTRIAL STOCK INDEX
A1NCY	DOW JONES AMERICAS CONSUMER NON-CYCLICAL STOCK INDEX
A1TLS	DOW JONES AMERICAS TELECOMMUNICATIONS INDEX
A1UTI	DOW JONES AMERICAS UTILITIES STOCK INDEX
A1FIN	DOW JONES AMERICAS FINANCIAL STOCK INDEX
A1TEC	DOW JONES AMERICAS TECHNOLOGY STOCK INDEX
A1HCR	DOW JONES AMERICAS HEALTHCARE STOCK INDEX



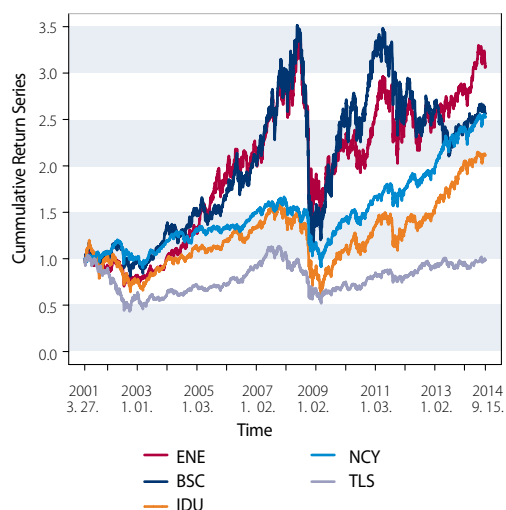
Časové rady uzatváracích cien týchto deviatich subindexov sme analyzovali v období od 27. 3. 2001 do 15. 9. 2014. Počas tohto obdobia sme získali takmer 3 500 údajov o uzatváracích cenách. Pre každý zo subindexov sme vypočítali logaritmické denné výnosnosti dané vzťahom:

$$r_t = \ln \frac{I_t}{I_{t-1}} = \ln I_t - \ln I_{t-1} \quad (1)$$

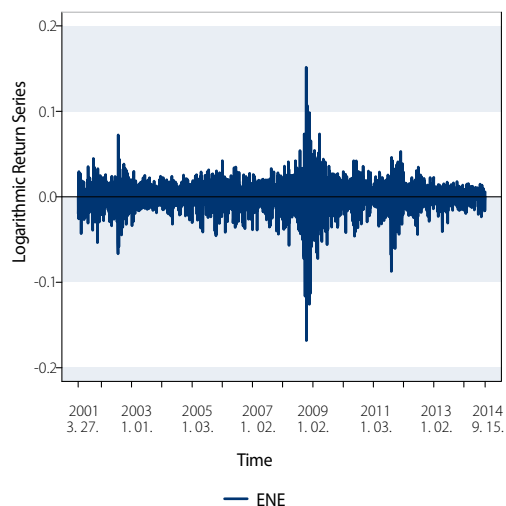
kde I_t je hodnota burzového subindexu v čase t .

Pre ilustráciu kumulatívny tvar výnosností prvých piatich subindexov uvádzame na obr. 1, pričom na obr. 2 je uvedená logaritmická výnosnosť subindexu ENE. Z grafu je jasne viditeľné, že nestabilita a turbulentný vývoj na trhu sú zjavné najmä v krízovom roku 2008, keď na obr. 1 sledujeme pri všetkých piatich subindexoch výrazný pokles, čo sa na obr. 2 prejavilo vysokou volatilitou konkrétneho subindexu.

Obrázok 1 Kumulatívna denná výnosnosť vybraných subindexov DJIA, vlastné spracovanie v programe R



Obrázok 2 Logaritmická výnosnosť subindexu ENE, vlastné spracovanie v programe R



V prvom kroku analýzy sme testovali logaritmické výnosnosti na prítomnosť jednotkového koreňa. Využili sme rozšírený Dickeyov-Fullerov test. Vo všeobecnosti uvažovaný predpoklad o tom, že logaritmické výnosnosti stacionarizujú časový rad sa potvrdil, keďže v každom časovom rade sme na základe p-hodnôt testov zamietli nulovú hypotézu o prítomnosti jednotkového koreňa. Po splnení predpokladov, ktoré sa vyžadujú na časové rady, analýza pokračuje s využitím korelačných matíc, pričom bol využitý dvojaký prístup. Prvým je využitie časových okien, pri ktorom sa využívajú klasické korelačné matice. Druhý prístup využíva podmienené dynamické korelácie. Oba prístupy a výsledky z nich sú uvedené v nasledujúcich kapitolách.

MODELOVANIE FINANČNÝCH SIETÍ NA NEPREKRÝVAJÚCICH SA ČASOVÝCH OKNÁCH

Na databáze denných logaritmických výnosností boli vytvárané neprekrývajúce sa časové okná dĺžky 20. Dĺžka časového okna bola štandardne zvolená, približne sa rovnala počtu pracovných dní v mesiaci. Cieľom využitia neprekrývajúcich sa časových okien bolo odstránenie krátkodobej pamäti z časového radu. Týmto spôsobom nám vzniklo 174 neprekrývajúcich sa časových okien dĺžky 20. Na týchto časových oknách sme vypočítali krížové korelácie medzi výnosnosťami daných subindexov. Pearsonov korelačný koeficient medzi i -tým a j -tým subindexom je daný vzťahom:

$$\rho_{i,j} = \frac{\text{cov}_{i,j}}{\sigma_i \cdot \sigma_j} \quad (2)$$

kde čitateľ predstavuje kovarianciu medzi i -tým a j -tým subindexom a v menovateli je uvedený súčin štandardných odchýlok týchto subindexov.

Tieto korelačné koeficienty sme s cieľom zachovania základných axiém vzdialeností pretransformovali v súlade s metodikou profesora Mantegna (1999) podľa vzťahu:

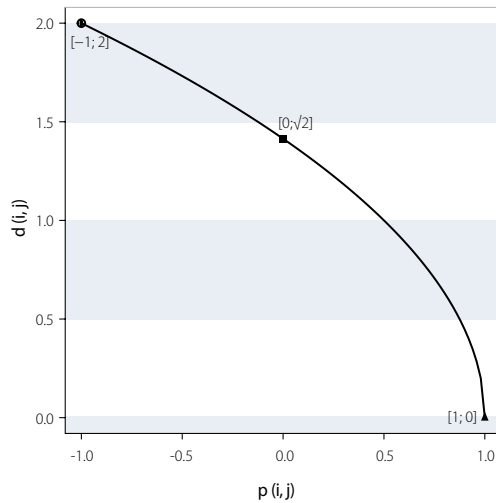
$$d(i,j) = \sqrt{2 \times (1 - \rho_{i,j})} \quad (3)$$

kde $d(i,j)$ predstavuje vzdialenosť medzi i -tým a j -tým subindexom a $\rho(i,j)$ korelačný koeficient medzi týmito subindexmi. Závislosť medzi nami vypočítanou vzdialenosťou a korelačným koeficientom uvádzame na obr. 3.

Z korelačných matíc sme týmto spôsobom vytvorili matice vzdialeností. Získali sme 174 matíc vzdialeností. Tieto matice sú symetrické, s rozmerom 9×9 (9 subindexov), na hlavnej diagonále majú nuly a hodnota v i -tom riadku a j -tom stĺpci predstavuje vzdialenosť i -tého a j -tého subindexu. Takto definované matice už môžu byť reprezentované kompletnými grafmi s deviatimi vrcholmi a 36 hranami (každý z deviatich vrcholov je spojený s každým). Získali sme takto 174 kompletných grafov, ktoré ilustrujú vzdialenosti medzi subindexmi za dané časové okno. Celá analýza prebieha v prostredí progra-



Obrázok 3 Graf závislosti vzdialenosti vypočítanej na základe rovnice (3) od korelačného koeficientu, vlastné spracovanie



2 Stupeň vrcholu predstavuje počet hrán, ktoré z neho vychádzajú.

mu R , ktorý pre prácu s grafmi používa knižnicu *igraph*.

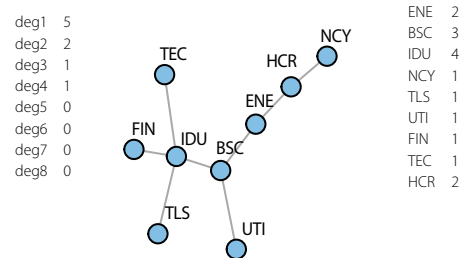
Ak je graf reprezentovaný maticou vzdialenosti, dá sa v ňom vypočítať najmenšia kostra. Vychádzame pritom z toho, že každý súvislý graf má kosteru, pričom táto kostra predstavuje taký „podgraf“ grafu, ktorý obsahuje všetky vrcholy (je faktorom), je súvislý a nemá kružnice (je stromom). Ak graf má nejaké hranové ohodnotenie (v našom prípade dĺžka hrany), potom určite musí v grafe existovať aspoň jedna taká kostra, ktorá má minimálny súčet hranových ohodnotení, a takúto kosteru budeme nazývať minimálna. Existuje viacero algoritmov na hľadanie najmenšej kostry grafu reprezentovaného maticou vzdialenosti, napríklad Kruskalov alebo Primov algoritmus. Knižnica *igraph* pri výpočte minimálnej kostry využíva Primov algoritmus na hranovo vážených grafoch (reprezentovaných maticou vzdialenosti). Algoritmus je nasledovný: v prvom kroku zvolíme ľubovoľný vrchol a do kostry pridáme hranu s minimálnym ohodnotením, ktorá s týmto vrcholom inciduje. Takto nám vznikne strom. Následne v ďalších krokoch k aktuálnemu stromu pridáme hranu, ktorej jeden vrchol leží v strome a druhý leží mimo stromu, a to takú, ktorá má minimálne ohodnotenie. Minimálna kostra súvislého grafu s n vrcholmi teda predstavuje graf s n vrcholmi a $n - 1$ hranami.

Zo 174 kompletných hranovo ohodnotených grafov sme si vypočítali 174 minimálnych kostry. Príklad minimálnej kostry prvého časového okna spolu s možnosťami jej reprezentácie (postupnosťou stupňov jednotlivých vrcholov a stupňami² jednotlivých vrcholov) je na obr. 4, pričom, ako sme uviedli, ide o graf s deviatimi vrcholmi (subindexmi) a s ôsmimi hranami (minimálnymi vzdialenosťami medzi nimi).

Vzhľadom na výpočtovú náročnosť spracovania týchto najmenších kostry pomocou matic susednosti alebo vzdialeností sme sa rozhodli re-

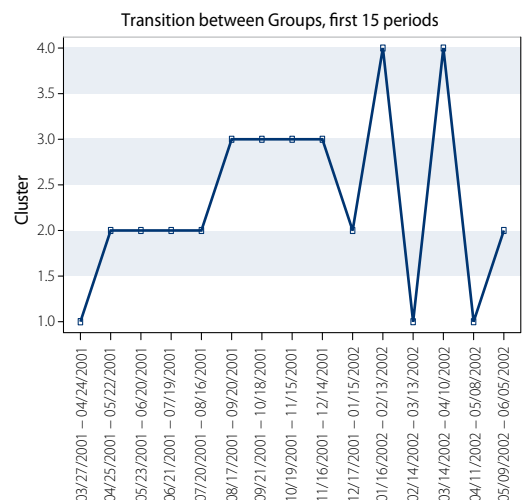
Obrázok 4 Reprezentácia najmenšej kostry grafu prvého časového okna

Minimum Spanning Tree from 03/27/2001 – 04/24/2001



prezentovať ich vektorom, ktorý obsahuje početnosti vrcholov (obr. 4 vľavo). Na takto definovanej reprezentácii bola následne aplikovaná zhluková analýza (využívali sme Euklidovskú vzdialenosť) s cieľom identifikovať určité skupiny najmenších kostry, ktoré majú rovnakú, respektíve veľmi podobnú štruktúru. Takto sme identifikovali určité trhové režimy, ktoré vychádzajú z empirických pozorovaní, keď napríklad v prípade veľkých poklesov na trhu majú výnosnosti tendenciu skorelovať a teda byť pri sebe veľmi blízko, čo by malo v našej najmenšej kostre vytvoriť tvar hviezdy (taký graf, ktorý má jeden vrchol stupňa $n-1$ a $n-1$ vrcholov stupňa jeden). Na druhej strane empirické pozorovania poukazujú na to, že v prípade stabilného trhu sa výnosnosti akcií vyvíjajú každá vlastným smerom, preto tam nepredpokladáme, že akcie budú až tak veľmi blízko seba, teda uvažujeme, že v našich najmenších kostrách sa začnú objavovať dlhšie cesty. Čo sa týka časového vývoja príslušnosti ku konkrétnemu zhluku, ktorý sledujeme na prechode medzi jednotlivými zhlukmi na obr. 5, pozorujeme, že nami vypočítané štruktúry majú tendenciu chvíľu ostávať v jednom režime (zo začiatku), pričom zaznamenávajú aj rýchlo sa meniaci vývoj (ku koncu).

Obrázok 5 Prechod medzi jednotlivými režimami trhu reprezentovanými štyrmi zhlukmi, prvých 15 časových okien





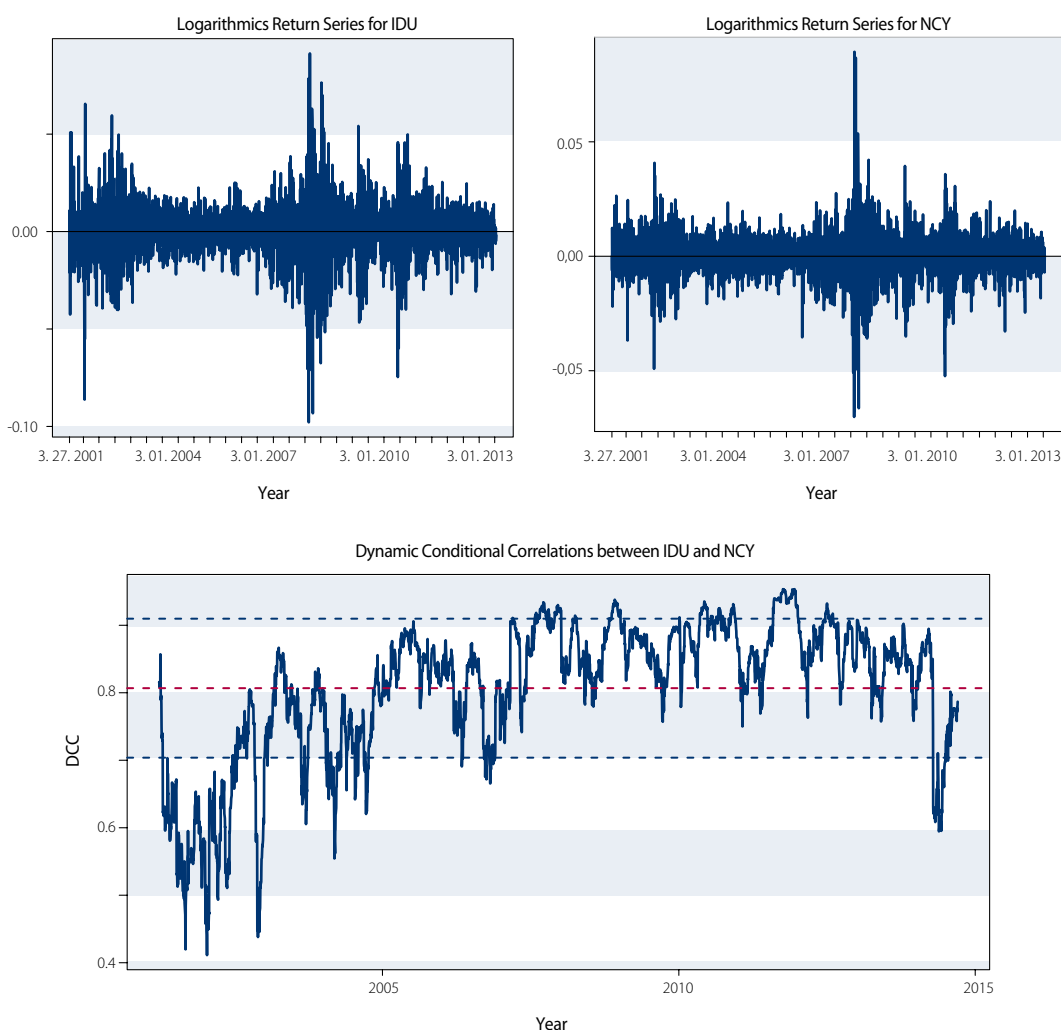
MODELOVANIE FINANČNÝCH SIETÍ S VYUŽITÍM PODMIENENÝCH DYNAMICKÝCH KORELÁCIÍ

Jadro diplomovej práce tvorilo pri aplikácii metódy najmenej kostry využitie podmienených dynamických korelácií, preto sa tejto téme budeme venovať podrobnejšie ako predchádzajúcej možnosti využívajúcej časové okná. Aj pri tejto analýze sme vychádzali z deviatich subindexov amerického burzového indexu DJIA. Na rozdiel od predchádzajúcej analýzy sme už nevyužívali časové okná, ale vychádzali sme z rezíduí modelu GARCH(1, 1), z ktorých sme následne počítali podmienené dynamické korelácie pre každú dvojicu subindexov. Najprv sme rovnako ako v predchádzajúcej analýze vypočítali logaritmické výnosnosti jednotlivých subindexov. Z týchto sme odhadli modelom GARCH(1, 1) rezíduá a z nich sme vypočítali podmienené dynamické korelácie. Príklad logaritmických výnosností subindexov IDU a NCY a následne vývoj ich podmienených dynamických korelácií uvádzame na obr. 6. Ako môžeme vidieť, logaritmické výnosnosti oboch sledovaných subindexov sa vyvíjajú podobne,

preto aj ich podmienené dynamické korelácie sú relatívne vysoké. Pri grafe podmienených dynamických korelácií je červenou horizontálnou osou označená stredná hodnota podmienenej dynamickkej korelácie za celé sledované obdobie a modré horizontálne čiary predstavujú súčet, respektíve rozdiel strednej hodnoty a štandardnej odchýlky týchto korelácií.

Na rozdiel od predchádzajúcej časti, v ktorej sme korelačné matice počítali z neprekrývajúcich sa časových okien dĺžky 20 a dátovú základňu tvorilo „iba“ 174 korelačných matíc, vďaka prístupu s využitím podmienených dynamických korelácií máme k dispozícii takmer 3 500 korelačných matíc (jednu za každé jedno časové pozorovanie). Keďže model GARCH(1, 1) považujeme za filter, ktorý časové rady očisťuje od krátkodobej pamäte, predpokladáme, že z analyzovaných časových radov sa nám aspoň z časti podarilo odstrániť krátkodobú pamäť. Následne sme rovnako ako v predchádzajúcej kapitole vypočítali z korelačných matíc matice vzdialenosti, z nich kompletne grafy, ktoré slúžili na výpočet najmenších kostier. Ďalej sme tieto kostry reprezentované binárnymi

Obrázok 6 Logaritmické výnosnosti a podmienené dynamické korelácie medzi subindexmi IDU a NCY





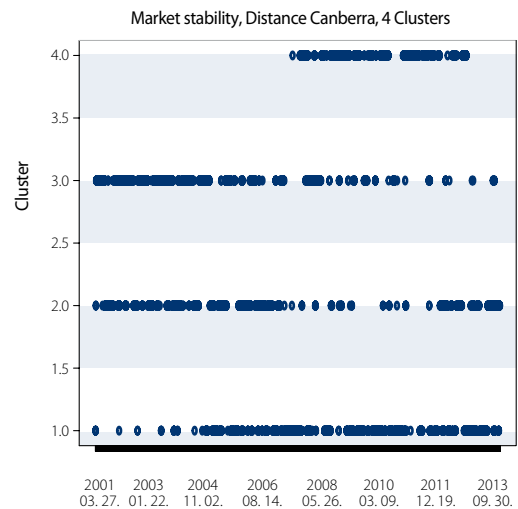
3 Slučka je hrana vedúca z vrcholu do neho samotného (v našom prípade to možno interpretovať pravdepodobnosťou, že režim trhu ostane aj v nasledujúcom období stabilný, ostane v rovnakom režime a nepreskočí do iného režimu).

maticami susednosti zhluovali pomocou Wardovej metódy aj metódy K-means pri porovnávaní rôznych typov vzdialeností a podobne. Podrobnú analýzu prekrytia v závislosti od typu zvolenej vzdialenosti a počtu identifikovaných zhlukov môže čitateľ nájsť v diplomovej práci.

Analýza následne pokračovala výpočtom takzvaných matic prechodu. Nami identifikovaný konkrétny zhluk predstavuje podľa nášho predpokladu konkrétny režim nachádzajúci sa na trhu. Ak predpokladáme, že americké burzové indexy vďaka svojej obrovskej likvidite predstavujú trhy blízke efektívnym trhom, potom môžeme prijať predpoklad o neexistencii pamäte tohto trhu a výnosnosti považovať za realizácie Markovovho procesu. Pri prijatí tohto predpokladu uvažujeme o matici prechodu, ktorá predstavuje štvorcovú maticu rozmeru $k \times k$ (kde k predstavuje počet identifikovaných zhlukov). Táto matica v i -tom riadku a j -tom stĺpci vyjadruje počet režimov trhu, ktoré boli v určitom pozorovaní v i -tom a v nasledujúcom pozorovaní v j -tom zhluku. Súčet prvkov na hlavnej diagonále tejto matice predstavuje počet režimov, ktoré ostali v rovnakom zhluku aj v nasledujúcom období. Čím väčší je počet prvkov na hlavnej diagonále tejto matice, tým je trh v sledovanom období stabilnejší (režimy ostávajú stabilné a nie sú pozorované časté prechody medzi nimi). Tieto prechodové matice sme vypočítali pre každý druh vzdialenosti a rôzne počty zhlukov. Z výsledkov našej analýzy vyplýva, že trhy sú väčšinou relatívne stabilné, keďže vo väčšine uvažovaných druhov vzdialeností so zohľadnením rôzneho počtu zhlukov tvorí hlavná diagonála týchto matic prechodu najväčšiu časť hodnôt. Znamená to, že ak sa trh nachádza v konkrétnom režime, je najväčšia pravdepodobnosť, že v tomto režime aj zostane. Ako príklad v článku uvádzame štyri zhluky pre vzdialenosť Canberra, pri ktorej až 3 121 (súčet prvkov na hlavnej diagonále) z 3 498 pozorovaní ostalo v nasledujúcom období v rovnakom zhluku. Tento vývoj je zobrazený aj na obr. 7, kde sme pre lepšiu prehľadnosť vymazali úsečky reprezentujúce prechody medzi zhlukmi (čím dlhšia a plnšia je modrá elipsa, tým dlhšie bol trh v rovnakom režime).

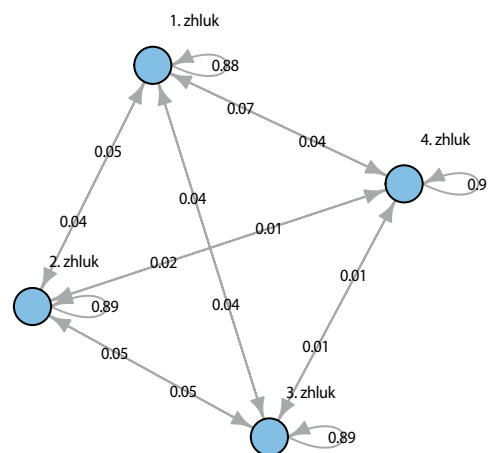
Z matice prechodu sme následne odhadli maticu pravdepodobnosti prechodu z jedného zhluku do iného. Táto matica je zostrojená predelením konkrétnej hodnoty matice prechodu riadkovým súčtom matice prechodu, kde sa daná hodnota nachádza. Interpretácia tejto matice je nasledovná: hodnota v i -tom riadku a j -tom stĺpci predstavuje pravdepodobnosť, že ak sa trh nachádza v režime i , v nasledujúcom období sa bude nachádzať v režime j . Čím väčší je počet režimov trhu, ktoré boli v nejakom pozorovaní v i -tom a v nasledujúcom pozorovaní v j -tom zhluku, tým väčšia je aj pravdepodobnosť prechodu medzi i -tým a j -tým zhlukom. Táto matica pravdepodobnosti prechodu medzi zhlukmi sa najčastejšie graficky zobrazuje pomocou orientovaných grafov so slučkami³, ktorých vrcholy predstavujú zhluky a hranové odhodnotenie predstavuje pravdepodobnosť pre-

Obrázok 7 Vývoj príslušnosti ku konkrétnemu zhluku, vzdialenosť Canberra, štyri zhluky



chodu medzi danými vrcholmi (zhlukmi). Pre prípad nami uvažovanej vzdialenosti Canberra v prípade štyroch zhlukov je uvedená grafická reprezentácia (obr. 8), kde naozaj môžeme sledovať najvyššiu pravdepodobnosť stabilného, nemeniaceho sa trhu, vzhľadom na vysoké pravdepodobnosti uvedené v slučkách. Možno tu tiež sledovať aj to, ako preskakujú režimy medzi sebou. Veľmi málo napríklad medzi sebou preskakujú režimy medzi 3. a 4. zhlukom (1 % pravdepodobnosť), častejšie medzi 1. a 4. zhlukom (7 a 4 % pravdepodobnosť).

Obrázok 8 Orientovaný graf so slučkami reprezentujúci pravdepodobnostnú maticu prechodu pre vzdialenosť Canberra a štyri zhluky



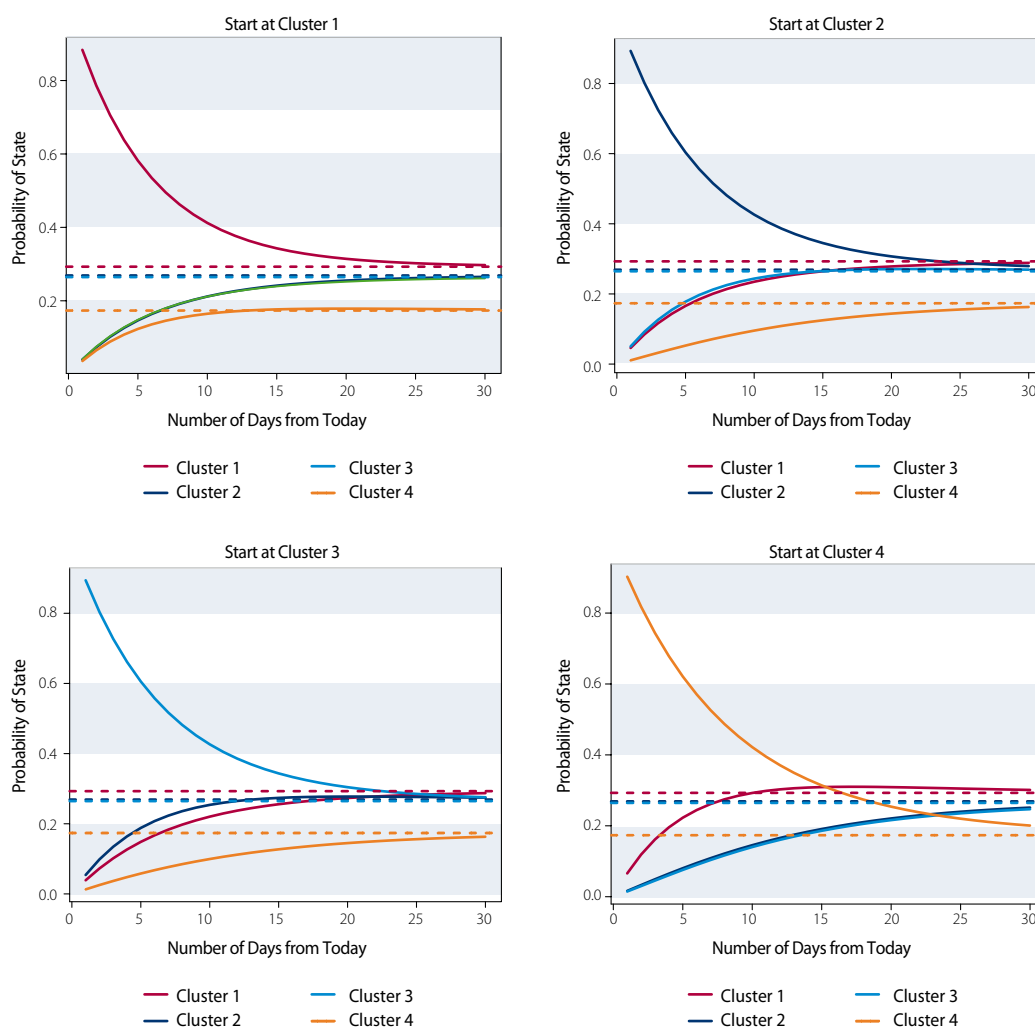
Ďalšou témou diplomovej práce bola realizácia Markovových reťazcov, na základe ktorých autor simuloval vývoj trhu do budúcnosti. Pri týchto reťazcoch sa vychádza z vyššie uvedených pravdepodobnostných matic a uvažuje sa o tom, že ak poznáme pravdepodobnosti prechodu medzi



režimami v rámci nasledujúcich období, vieme odhadnúť, ako sa bude trh správať v budúcnosti. Buď skonverguje k nejakému konkrétnemu režimu, alebo bude nejaký režim na trhu z dlhodobého hľadiska dominovať. Túto simuláciu vývoja pravdepodobnosti sme vykonali pre spomínanú vzdialenosť Canberra so štyrmi zhlukmi, ktorej pravdepodobnostná matica je graficky reprezentovaná na obr. 8. Simuláciu počas prvých 30 dní sme vykonali pre trh „štartujúci“ v každom zo štyroch uvedených

režimov a jej výsledky sú uvedené na obr. 9. Ako môžeme vidieť, pravdepodobnosť, že sa aj v nasledujúcich dňoch bude trh nachádzať v režime, v ktorom sa začal, postupne klesá, pričom pravdepodobnosť ostatných režimov rastie. Následne bola vypočítaná dlhodobá predpoveď konvergencie pre jednotlivé režimy, ktorá vychádza práve z aplikácie Markovových reťazcov. Na obr. 9 sú tieto vypočítané hodnoty uvedené čiarkovanou čiarou a je zrejmé, že aj simulácia sa k nim postupne blíži.

Obrázok 9 Simulácia vývoja pravdepodobnosti príslušnosti k zhluku prvých 30 dní od identifikácie trhového režimu pre vzdialenosť Canberra a štyri zhluky

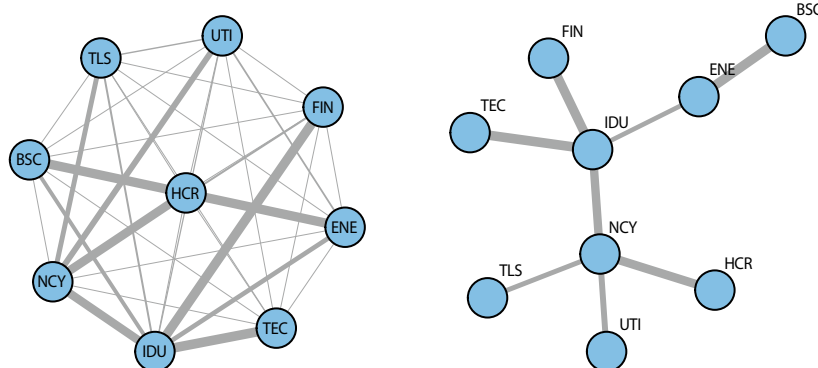


Našou ambíciou v závere analýzy bolo popísať na základe grafových charakteristík každý identifikovaný zhluk (trhový režim) pre každú vzdialenosť. Vychádzali sme z toho, že zhluky sú identifikované na základe najmenších kostier, preto je logické hľadať nejakú reprezentatívnu najmenšiu kostru za jednotlivé zhluky. Vypočítali sme ich tak, že sme spočítali za každý zhluk matice susednosti jednotlivých najmenších kostier. Podstata je taká, že ak jednotka v matici susednosti predstavuje hranu medzi dvojicou vrcholov a ak tieto hrany

spočítame, v novovzniknutej matici budú mať najväčšie hodnoty hrany, ktoré sa v danom zhluku vyskytujú najčastejšie. Príkladom môže byť tentokrát vzdialenosť Minkowski so štyrmi zhlukmi, ktorú pre prvý zhluk uvádzame na obr. 10. Vľavo na tomto obrázku je graf, ktorý vznikne súčtom matíc susednosti najmenších kostier prvého zhluku. Hrúbka hrany predstavuje počet spoločných hrán v zhluku. Vpravo je z tohto grafu vypočítaný reprezentant najmenšej kostry prvého zhluku na základe hrúbky hrán (najhrubšie hrany). Následne



Obrázok 10 Vzdialenosť Minkowski, štyri zhluky: grafická reprezentácia grafu vytvoreného súčtom matic susednosti najmenších kostier prvého zhľuku (vľavo) a reprezentant najmenšej kostry prvého zhľuku (vpravo), hrúbka hrany predstavuje počet spoločných hrán v zhľuku



sme porovnávali tieto reprezentatívne najmenšie kostry prostredníctvom grafových charakteristík. Zhľuky zastupovali reprezentatívne najmenšie kostry a porovnávali sme nasledujúce grafové charakteristiky:

- stupne vrcholov v reprezentatívnej najmenšej kostre,
- postupnosť stupňov vrcholov v reprezentatívnej najmenšej kostre,
- excentricitu vrcholov v reprezentatívnej najmenšej kostre,
- polomer reprezentatívnej najmenšej kostry,
- priemer reprezentatívnej najmenšej kostry.

Podarilo sa nám identifikovať určité malé rozdiely medzi uvažovanými zhľukmi. Predpokladáme, že čím menší je polomer a priemer grafu, tým volatilnejší trh zhľuk reprezentuje, keďže v tomto prípade majú burzové indexy tendenciu skorelovať a približovať sa k sebe. Naopak, väčšie polomery a priemery grafu hovoria o dlhších cestách, a teda o stabilnejších režimoch trhu. Z pohľadu analýzy excentricít jednotlivých subindexov mô-

žeme povedať, že počas väčšiny sledovaného obdobia bol centrom trhovej štruktúry subindex *IDU*. Detailnejšie výsledky a porovnanie jednotlivých grafových charakteristík sa nachádza v predmetnej diplomovej práci.

ZÁVER

V príspevku sme prezentovali časť diplomovej práce, ktorá bola venovaná modernej matematickej disciplíne, teórii grafov. Z pohľadu autora ide o jednu z možností, ktorou sa v budúcnosti bude uberať analýza štruktúry kapitálových trhov. Najväčší dôraz bol v práci kladený na metódu hľadania najmenšej kostry grafu, ktorá predstavuje takú štruktúru prvkov v rámci skupiny, pri ktorej majú tieto prvky k sebe najbližšie. Metóda bola aplikovaná na sektorových subindexoch amerického burzového indexu DJIA a využili sa pri nej mnohé matematicko-štatistické metódy. Každou realizovanou analýzou sa v práci otvárali ďalšie možnosti pre následnú analýzu a problematika si žiada ďalšie hlbšie skúmanie.

Použitá literatúra:

- BONANNO, G. – CALDARELLI, G. – LILLO, F. – MICCICHÉ, S. – VANDEWALLE, N. – MANTEGNA, R. N. 2004. Networks of Equities in Financial Markets. In: The European Physical Journal B.
- CZAP, J. 2013. Teória grafov. Nepublikované študijné materiály zverejnené v MOODLE, EkF TU v Košiciach.
- DEMEL, J. 2002. Grafy a jejich aplikace. Praha: Academia. ISBN: 80-200-0990-6.
- DJIA. Dow Jones Global Indices. [online]. [cit. 21. 04. 2015]. Dostupné na: <<http://www.djindexes.com/globalfamily/>>.
- FINANCIAL NETWORK ANALYTICS (FNA). A Short History of Correlation Networks Research. [online]. [cit. 11. 04. 2015]. Dostupné na: <<http://www.fna.fi/blog/2012/07/06/a-short-history-of-correlation-networks-research>>.
- KENETT, D. – TUMMINELLO, M. – MADI, A. – GERSHGORIN, G. – MANTEGNA, R. N. – BEN-JACOB, E. 2010. Dominating Clasp of the Financial Sector Revealed by Partial Correlation Analysis of the Stock Market. In: PLOS ONE.
- KNOR, M. 2008. Teória grafov. Bratislava: Vydavateľstvo STU. ISBN: 978-80-227-2879-9.
- KRÁL, P. – KANDEROVÁ, M. – KAŠČÁKOVÁ, A. – NEDELOVÁ, G. – VALENČÁKOVÁ, V. 2009. Viacrozmerné štatistické metódy so zameraním na riešenie problémov ekonomickej praxe. Banská Bystrica: Univerzita Mateja Bela. ISBN: 978-80-8083-840-9.
- MANTEGNA, R. N. 1999. Hierarchical structure in financial markets. In: The European Physical Journal B, s. 193-196.
- MIZUNO, T. – TAKAYASU, H. – TAKAYASU, M. 2005. Correlation Networks Among Currencies. In: Cornell University Library.
- NAYLOR, M. – ROSE, L. – MOYLE, B. 2007. Topology of Foreign Exchanges Markets Using Hierarchical Structure Methods. In: Physica A.
- ONNELA, J. P. – CHAKRABORTI, A. – KASKI, K. – KERTÉSZ, J. – KANTO, A. 2003. Asset Trees and Asset Graphs in Financial Markets. In: Physica Scripta, s. 48-53.
- STANKOVIČOVÁ, I. – VOJTKOVÁ, M. 2007. Viacrozmerné štatistické metódy s aplikáciami. Bratislava: Iura Edition. ISBN: 978-80-8078-152-1.